A racionális törtfüggvény

Elsőként, a hétköznapi életből vett példákon bemutatva, tisztázzunk két fontos fogalmat: az egyenes és a fordított arányosságot. Tegyük fel, hogy kedvenc csokoládénk egységára . Abban az esetben, ha nem 1, hanem 2 vagy 3 vagy 4 vagy 5 stb. darabot vásárolunk belőle, akkor értelemszerűen a kasszánál fizetendő összeg az egységár kétszerese, háromszorosa, négyszerese, ötszöröse stb. Általában pedig „” csokoládéért -ot kell fizessünk.

Illetve, ha adott összegből szeretnénk ugyanezen egységárú csokoládéból vásárolni, akkor egy egyszerű osztás művelettel számolhatjuk ki, hány darabra futja belőle, pl.: rendelkezésre álló összegből vásárolható.

Ezen mennyiségek között egyenes arányosság teljesül, tehát ahányszorosára változtatom az egyik mennyiséget, ugyanannyiszorosára kell változtatnom a másik mennyiséget. Definíció tekintetében azt mondjuk: a megadott mennyiségek hányadosa állandó. Ezt a kapcsolatot szemlélteti a lineáris (másnéven elsőfokú) függvény.

Megjegyzés: az egyenes arányosság sok esetben alkalmazható, mint összetartozó mennyiségek aránypárja.

Most vizsgáljunk egy másik, a hétköznapi életben előforduló példát: tegyük fel, hogy valamilyen közlekedési eszközzel szeretnénk eljutni az „” várostól távolságban lévő „” városba. Abban az esetben, ha járművünkkel tudjuk tartani a átlagos sebességet, akkor az utazás összesen időtartamú (ennek ellenőrzése az általános iskolában megismert: összefüggés átrendezéséből adódó: képletből történik). Vizsgáljuk, hogyan változik az utazás időtartama, ha az eredetileg tervezett átlagos sebesség módosul. Ha a forgalmi viszonyok úgy alakulnak, hogy az átlagos sebesség -szeresére vagy -szeresére vagy -szorosára növelhető, akkor azt tapasztaljuk, hogy az utazás időtartama az eredeti tervezett - szeresére (tehát percre), vagy -szeresére (tehát percre), vagy - szorosára (tehát percre) csökken. Ha pedig a forgalmi viszonyok úgy alakulnak, hogy az átlagos sebesség -szeresére vagy -szeresére vagy -szorosára változik (tehát valamely külső körülmény miatt csökken), akkor azt tapasztaljuk, hogy az utazás időtartama az eredeti tervezett - szeresére (tehát percre), vagy -szeresére (tehát percre), vagy - szorosára (tehát percre) növekszik. Tehát ezen mennyiségek között fordított arányosság teljesül, tehát ahányszorosára változtatom az egyik mennyiséget, annyiad részére kell változtatnom a másik mennyiséget. Definíció tekintetében azt mondjuk: a megadott mennyiségek szorzata állandó.

A racionális törtfüggvény, az utóbbi példában lévő, úgynevezett fordított arányosságot szemlélteti.

Ábrázoljuk előbb, magát az alapfüggvényt, ez hozzárendelési utasítással rendelkezik, hogy az ilyen függvények ábrázolásakor, milyen megfontolások alapján érdemes következtetéseket levonni.

A tört értelmezése szerint, a nevezőjében változó tartalmazó mennyiség nem veheti fel a értéket, tehát .

Tehát a függvénnyel, a mindenkori nevező zérushelyénél (esetünkben ez a érték) „történik valami”. Ennek a pontnak lesz matematikai elnevezése: szakadási hely, amelyekről a későbbiekben lesz még szó.

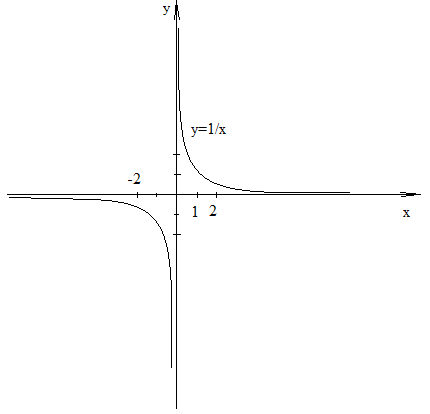
Ezután pedig elegendő lesz a problémás érték körül szóródó értékek vizsgálata.

Legyenek a: amelyekre a hozzárendelési utasításnak megfelelően helyettesítési értéket számolunk.

(Azért ezeket a bejövő értékeket érdemes vizsgálni, mert ezeknek könnyen meghatározhatjuk reciprokaikat.)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

A függvény grafikonjának fix pontjai: , amelyekre ezután illeszthetjük a racionális törtfüggvény grafikonját, a fordított arányosságot kifejező, úgynevezett: hiperbolát.



Észrevételek:

- a hiperbola grafikonja alapesetben a derékszögű koordináta-rendszer két különböző síknegyedében jelenik meg;

- a feladat szövegkörnyezetétől függően előfordulhat, hogy csak pozitív számok lehetnek bejövő értékek, ekkor a 3.síknegyedben lévő hiperbola szár ábrázolásától eltekintünk;

- a hiperbola szárai közelítenek a vízszintes és függőleges tengelyekhez, nem metszi el és nem érintik azokat;

- a hiperbola szárai folyamatosan közelítenek a tengelyekhez, nem párhuzamosak lesznek velük;

- a körül szóródó bejövő x értékekre számolt helyettesítési értékek is körül szóródnak, amely azért következik be, mert az alapfüggvény hozzárendelési utasításában a törtes tag után egy értékű konstans van;

- az előzőből következik, hogy az alapfüggvénynek a koordinátákkal rendelkező origó a „problémás” pontja.

Megjegyzések:

- a hiperbola szárai a hozzárendelési utasítás módosításával elmetszheti a vízszintes és/vagy függőleges tengelyeket;

- a hozzárendelési utasítás módosításával megadott hiperboláknak is lesz „problémás” pontja;

- a mindenkori problémás pont összetevőjét alaphalmaz-vizsgálattal határozzuk meg, y összetevője pedig a törtes tag utáni konstansérték lesz. Ezt a tulajdonságot, majd az általánosításkor tudjuk majd kihasználni;

- a hozzárendelési utasítás módosításával megadott hiperbola szárai is közelítenek bizonyos tengelyekhez, amelyek nem feltétlenül a vízszintes és függőleges tengely, ezeket gyűjtőnéven ASZIMPTOTA-tengelyeknek nevezzük;

- a módosított hozzárendelési utasításból származtatott aszimptota-tengelyek is részre osztják a síkot;

- az előzőekben kapott pontokat tekinthetjük „normál”-emelkedésnek: balra lépéshez lefelé lépés; balra lépéshez lefelé lépés; balra lépéshez lefelé lépés; jobbra lépéshez felfelé lépés; jobbra lépéshez felfelé lépés és jobbra lépéshez felfelé lépés tartozik;

- a hiperbolát minden esetben érdemes pontra illesztve ábrázolni.

Általános hozzárendelési utasítás: grafikonja: hiperbola (függvénytáblázat 63.oldal).

Ebből az általános alakból értékekből származtathatjuk az alapfüggvényt, amely azt jelenti, hogy

Hiperbolák ábrázolásakor előbb meghatározzuk a „problémás” pontot, amelynek összetevőjénél berajzoljuk a függőleges tengellyel párhuzamos aszimptota-tengelyt; illetve a törtes tag utáni konstansnak megfelelően, mint értéknél berajzoljuk a vízszintes tengellyel párhuzamos aszimptota tengelyt, amelyekhez a függvény szárai közelítenek majd. Ezután a problémás pont körül szóró -ekre helyettesítési értéket számolunk és az így kapott összetartozó érték-párokra illesztjük függvény grafikonját.

1.Feladat: Ábrázolja a függvényeket!

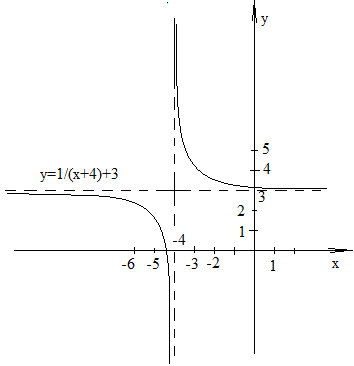
a)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből . Vagyis értéknél berajzolunk a függőleges tengellyel párhuzamos aszimptota-tengelyt. Valamint a törtes tag utáni értéknél berajzolunk a vízszintes tengellyel párhuzamosan egy aszimptota-tengelyt. Tehát a „problémás” pont a koordinátájú pont.

Továbbá értéktáblázatunkban a problémás körül szóródó bejövő értékekre számolunk helyettesítési értéket:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

A függvény grafikonjának fix pontjai: .



Észrevételek:

- az aszimptota tengelyekhez képest a hiperbola szárai az 1-es és 3-as síknegyedben vannak;

- a felvett függvény-értékek (kimenő ) a hozzárendelési utasításban, a törtes tag utáni -as konstans körül szóródnak és ehhez képest (a számlálóban lévő -es érték miatt) hozzá képest „normál”-emelkedésű, tehát: balra lépéshez lefelé lépés; balra lépéshez lefelé lépés; balra lépéshez lefelé lépés; jobbra lépéshez felfelé lépés; jobbra lépéshez felfelé lépés és jobbra lépéshez felfelé lépés tartozik.

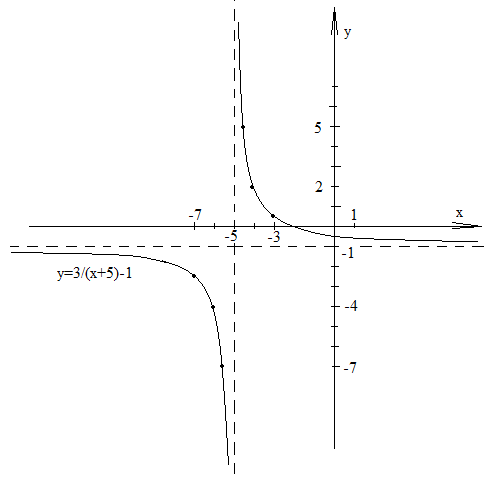
b)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből . Vagyis értéknél berajzolunk a függőleges tengellyel párhuzamos aszimptota-tengelyt. Valamint a törtes tag utáni értéknél berajzolunk a vízszintes tengellyel párhuzamosan egy aszimptota-tengelyt. Tehát a „problémás” pont a koordinátájú pont.

Továbbá értéktáblázatunkban a problémás körül szóródó bejövő értékekre számolunk helyettesítési értéket:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

A függvény grafikonjának fix pontjai: .



Észrevételek:

- az aszimptota tengelyekhez képest a hiperbola szárai az 1-es és 3-as síknegyedben vannak;

- a felvett függvény-értékek (kimenő ) a hozzárendelési utasításban, a törtes tag utáni -es konstans körül szóródnak és ehhez képest (a számlálóban lévő -as érték miatt minden felvett függvényérték a –3szorosára változik) hozzá képest, tehát: balra lépéshez lefelé lépés; balra lépéshez lefelé lépés; balra lépéshez lefelé lépés; jobbra lépéshez felfelé lépés; jobbra lépéshez felfelé lépés és jobbra lépéshez felfelé lépés tartozik.

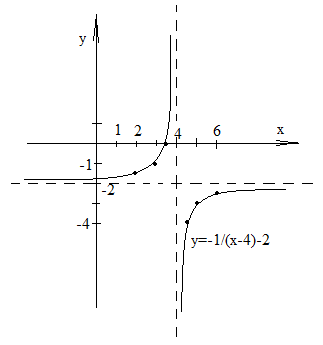
c)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből . Vagyis értéknél berajzolunk a függőleges tengellyel párhuzamos aszimptota-tengelyt. Valamint a törtes tag utáni értéknél berajzolunk a vízszintes tengellyel párhuzamosan egy aszimptota-tengelyt. Tehát a „problémás” pont a koordinátájú pont.

Továbbá értéktáblázatunkban a problémás körül szóródó bejövő értékekre számolunk helyettesítési értéket:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

A függvény grafikonjának fix pontjai: .



Észrevételek:

- az aszimptota tengelyekhez képest a hiperbola szárai a 2-es és 4-es síknegyedben vannak;

- a felvett függvény-értékek (kimenő ) a hozzárendelési utasításban, a törtes tag utáni -es konstans körül szóródnak és ehhez képest (a számlálóban lévő -es érték miatt, minden felvett függvényérték –szeresére változik) hozzá képest „normál”-emelkedésű, tehát: balra lépéshez felfelé lépés; balra lépéshez felfelé lépés; balra lépéshez felfelé lépés; jobbra lépéshez lefelé lépés; jobbra lépéshez lefelé lépés és jobbra lépéshez lefelé lépés tartozik.

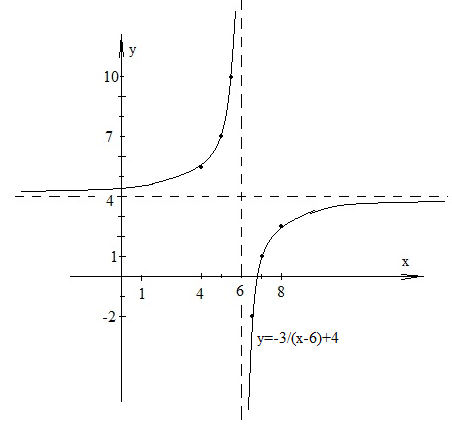
d)

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből . Vagyis értéknél berajzolunk a függőleges tengellyel párhuzamos aszimptota-tengelyt. Valamint a törtes tag utáni értéknél berajzolunk a vízszintes tengellyel párhuzamosan egy aszimptota-tengelyt. Tehát a „problémás” pont a koordinátájú pont.

Továbbá értéktáblázatunkban a problémás körül szóródó bejövő értékekre számolunk helyettesítési értéket:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

A függvény grafikonjának fix pontjai: .



Észrevételek:

- az aszimptota tengelyekhez képest a hiperbola szárai a 2-es és 4-es síknegyedben vannak;

- a felvett függvény-értékek (kimenő ) a hozzárendelési utasításban, a törtes tag utáni -es konstans körül szóródnak és ehhez képest (a számlálóban lévő -as érték miatt minden felvett függvényérték a -3szorosára változik) hozzá képest „normál”-emelkedésű, tehát: balra lépéshez felfelé lépés; balra lépéshez felfelé lépés; balra lépéshez felfelé lépés; jobbra lépéshez lefelé lépés; jobbra lépéshez lefelé lépés és jobbra lépéshez lefelé lépés tartozik.

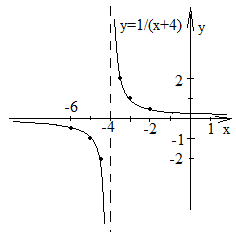
Ezután következzenek a transzformációval történő ábrázolás példái. Ekkor a műveletvégzés sorrendjének értelmében, elsőként az alapfüggvényt ábrázoljuk, ezután a tört nevezőben lévő műveletnek megfelelően a vízszintes tengely mentén toljuk jobbra vagy balra; ezt követően a számlálóban lévő esetleges konstanszorzónak megfelelően, minden felvett függvényértéket annyiszorosára változtatunk, ez függőleges tengely menti transzformáció; végül a törtes tag utáni konstansnak megfelelően, minden felvett függvényértékhez hozzáadjuk vagy kivonjuk belőle, ez szintén függőleges tengely menti transzformáció.

2.Feladat: Ábrázolja a függvényeket transzformációval!

a)

Lépések: alapfüggvény lesz, amely a lecke elején már szerepel, ezután amelynél a tört értelmezés miatt amelyből , tehát az alapfüggvény pontját egységgel balra toljuk, így kapjuk

a koordinátájú „problémás” pontot, valamint grafikonjának fix pontjait: ,

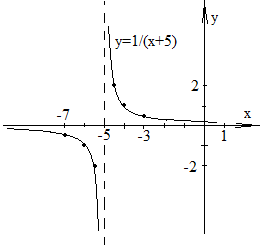


Végül a törtes tag utáni -as konstansnak megfelelően, az előző lépésben kapott fix pontok y összetevőit növeljük -mal, így kapjuk a koordinátájú „problémás” pontot, valamint grafikonjának fix pontjait: . A függvény grafikonja az 1/a) feladatban látható.

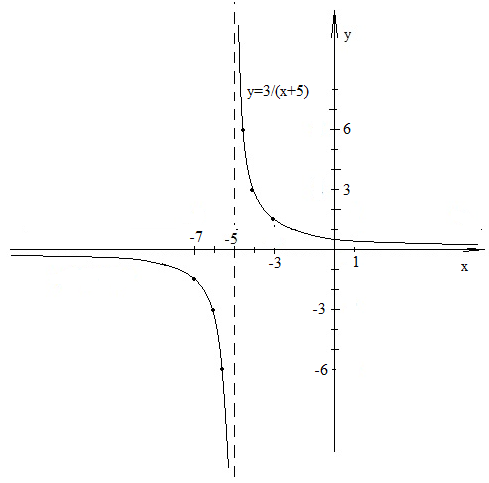
b)

Lépések: alapfüggvény lesz, amely a lecke elején már szerepel, ezután amelynél a tört értelmezés miatt amelyből , tehát az alapfüggvény pontját egységgel balra toljuk, így kapjuk

a koordinátájú „problémás” pontot, valamint grafikonjának fix pontjait:



Ezután a számlálóban lévő -as konstans értelmében minden felvett függvényértéknek a -szorosára kell változnia, tehát megmarad a koordinátájú „problémás” pont és grafikonjának fix pontjai:

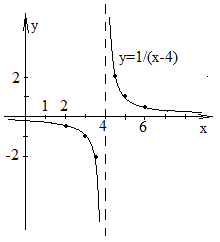


Végül a törtes tag utáni -es konstansnak megfelelően, minden felvett függvényértéket -el csökkentünk, így adódik a koordinátájú „problémás” pont és grafikonjának fix pontjai: . A függvény grafikonja az 1/b) feladatban látható.

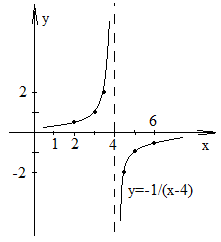
c)

Lépések: alapfüggvény lesz, amely a lecke elején már szerepel, ezután amelynél a tört értelmezés miatt amelyből , tehát az alapfüggvény pontját egységgel jobbra toljuk, így kapjuk

a koordinátájú „problémás” pontot, valamint grafikonjának fix pontjait: ,



Ezután a számlálóban lévő -es konstans értelmében minden felvett függvényértéknek a -szeresére kell változnia, tehát megmarad a koordinátájú „problémás” pont és grafikonjának fix pontjai:

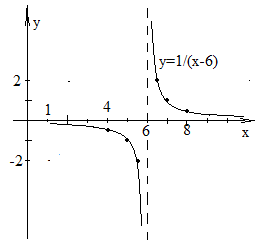


Végül a törtes tag utáni -es konstansnak megfelelően, minden felvett függvényértéket -vel csökkentünk, így adódik a koordinátájú „problémás” pont és grafikonjának fix pontjai: . A függvény grafikonja az 1/c) feladatban látható.

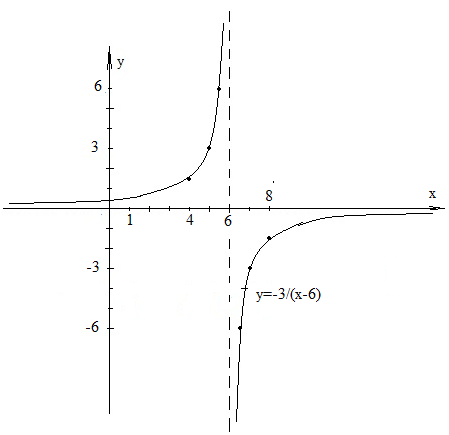
d)

Lépések: alapfüggvény lesz, amely a lecke elején már szerepel, ezután amelynél a tört értelmezés miatt amelyből , tehát az alapfüggvény pontját egységgel jobbra toljuk, így kapjuk

a koordinátájú „problémás” pontot, valamint grafikonjának fix pontjait: ,



Ezután a számlálóban lévő -as konstans értelmében minden felvett függvényértéknek a -szorosára kell változnia, tehát megmarad a koordinátájú „problémás” pont és grafikonjának fix pontjai:



Végül a törtes tag utáni -es konstansnak megfelelően, minden felvett függvényértéket -el növelünk, így adódik a koordinátájú „problémás” pont és grafikonjának fix pontjai: .

A függvény grafikonja az 1/d) feladatban látható.

Fontos megjegyezni, hogy a racionális törtfüggvények általános hozzárendelési utasítása, algebrai átalakításokkal mindig elérhető (legfeljebb, ezekre következzen példa.

3.Feladat: Ábrázolja a függvényeket!

a)

Végezzük el a megfelelő algebrai átalakításokat:

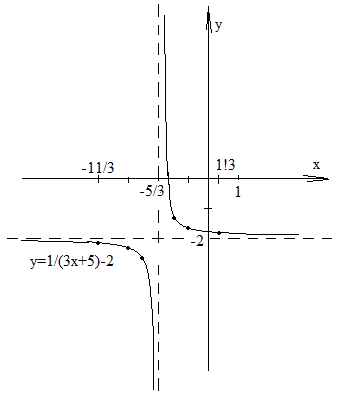
Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből . Vagyis értéknél berajzolunk a függőleges tengellyel párhuzamos aszimptota-tengelyt. Valamint a törtes tag utáni értéknél berajzolunk a vízszintes tengellyel párhuzamosan egy aszimptota-tengelyt. Tehát a „problémás” pont a koordinátájú pont.

Továbbá értéktáblázatunkban a problémás körül szóródó bejövő értékekre számolunk helyettesítési értéket:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

A függvény grafikonjának fix pontjai: .

Megjegyzés: az algebrai átalakítások után természetesen transzformációval történő ábrázolás is lehetséges.



b)

Végezzük el a megfelelő algebrai átalakításokat, amelyeknél felhasználjuk: az algebrai tört számlálójába akkor kerülhet „”-es tag, ha közös nevezőre hoztunk. Ezt a műveletet úgy tudjuk visszafejteni, ha a nevezőnek annyiszorosát „csempésszük” bele, amennyi a számlálóban az „”-es tag előtti szorzó értéke, majd meghatározzuk azt a pl.: „” betűjelű konstansnak az értékét, amellyel korrigálnunk kell, hogy teljesüljön az egyenlőség, tehát:

A számlálóban így visszamaradó kéttagú összegzés szerint két tag (két tört) összegére tagolunk úgy, hogy mindkét tört nevezője a közös nevező legyen, számlálóik pedig a zárt alakban lévő tagok valamelyike, tehát:

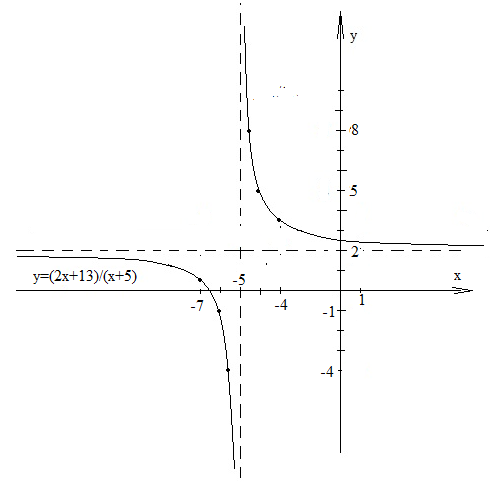
Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből . Vagyis értéknél berajzolunk a függőleges tengellyel párhuzamos aszimptota-tengelyt. Valamint a törtes tag utáni értéknél berajzolunk a vízszintes tengellyel párhuzamosan egy aszimptota-tengelyt. Tehát a „problémás” pont a koordinátájú pont.

Továbbá értéktáblázatunkban a problémás körül szóródó bejövő értékekre számolunk helyettesítési értéket:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

A függvény grafikonjának fix pontjai: .

Megjegyzés: az algebrai átalakítások után természetesen transzformációval történő ábrázolás is lehetséges.



c)

Végezzük el a megfelelő algebrai átalakításokat, amelyeknél a számlálót is és a nevezőt is (a másodfokú tagok miatt) teljes négyzetté alakítunk, hogy a megegyező szorzótényezőkkel egyszerűsíthessünk, tehát:

A számlálóban így visszamaradó kéttagú összegzés szerint két tag (két tört) összegére tagolunk úgy, hogy mindkét tört nevezője a közös nevező legyen, számlálóik pedig a zárt alakban lévő tagok valamelyike, tehát:

Alaphalmaz feltétel-vizsgálat: amelyből . Vagyis értéknél berajzolunk a függőleges tengellyel párhuzamos aszimptota-tengelyt. Valamint a törtes tag utáni értéknél berajzolunk a vízszintes tengellyel párhuzamosan egy aszimptota-tengelyt. Tehát a „problémás” pont a koordinátájú pont.

Továbbá értéktáblázatunkban a problémás körül szóródó bejövő értékekre számolunk helyettesítési értéket:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

A függvény grafikonjának fix pontjai: .

Megjegyzések: - az algebrai átalakítások után természetesen transzformációval történő ábrázolás is lehetséges.

- az előző hiperbolától ez abban is eltér, hogy a függvénynek nem csak egy szakadási helye van, hanem egy további is.

